MA 2223 ALG 3. ABRIL-JULIO 2006.
PROBLEMARIO 6

F denota un cuerpo arbitrario, y V un espacio vectorial de dim. n sobre F. Salvo mención contraria A denota una matriz en $M_{n\times n}(F)$, y T una transformación lineal $V\to V$. P^n denota los polinomios de grado $\leq n$ en $F[x]$.

1. Suponga que existe k tal que $A^k = 0$. Probar que $A^n = 0$.
2. Sea $A = diag(a_1, \ldots, a_n)$, y $f(x) \in F[x]$. Probar que $f(A) = diag(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.
3. Probar que el término constante de $C_A(x)$ es $\det A$, y que el coeficiente de x^{n-1} es TrA. Los fuertes pueden considerar cómo los demás coeficientes de $C_A(x)$ se relacionan con las entradas de A.
4. Sea A no-singular. Mostrar como se puede usar $C_A(x)$ par hallar A^{-1}.
5. Sea $T : V\to V$ una transformación lineal. Imitar el argumento dado en clase para matrices para probar que T tiene un polinomio minimal (definir esto), que denotamos $M_T(x)$, y que, si $\mathcal{B}$ es cualquier base de V y si $A = [T]_{\mathcal{B}}$, entonces $C_T(x) = C_A(x)$. Concluir que el polinomio minimal de una matriz es invariante bajo semejanza.
6. Sea $D : P^n\to P^n$ la operación diferenciación. Hallar $C_D(x)$ y $M_D(x)$. Lo mismo para $T : P^n\to P^n$ definida por $T(f(x)) = f(x) - xf'(x)$.
7. Enumerar las posibles matrices de Jordan de tamaño 4×4. Dar sus polinomios característico y minimal.
8. (a) ¿ Cuáles son las posibles formas de Jordan de A si (a) $C_A(x) = (x-a)^2(x-b)^2$ con $a \neq b$.(b) $C_A(x) = (x-a)^4$, $a \in F$. Dar $M_A(x)$ en cada caso.
9. (a) Hallar A tal que $C_A(x) = (x-2)^3(x-3)^4$ y $M_A(x) = (x-2)^2(x-3)^2$.(b) Hallar todas las formas de Jordan posibles de A tal que $C_A(x) = (x-2)^5(x+5)^4$ y $M_A(x) = (x-2)^3(x+5)^2$.
10. Dar un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ que no tiene subespacio invariante propio. ¿Existen ejemplos análogos en $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{C}^2$?
11. Demostrar que matrices en $M_{3\times 3}(\mathbf{C})$ son semejantes si y solo si tienen el mismo polinomio minimal. Dar un contraejemplo para matrices 4×4.
12. Suponer $T^2 = T$. Mostrar que $V = Ker(T) \oplus Im(T)$. Mostrar que $KerT$ e ImT son subespacios T-invariantes y hallar la representación de T en bloques diagonales.
13. Suponer que $T^2 = I$, y $carF \neq 2$. Probar que los autovalores de T son ± 1 y que V es la suma directa de los +1 y -1 autoespacios.

14. Sean $S, T : V \to V$ transformaciones lineales tales que $ST = TS$. Probar que cada autoespacio de T es invariante bajo S. Suponga además que S y T son diagonalizables. Probar que existe una base $\mathcal{B}$ tal que $[S]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{B}}$ son diagonales, es decir S y T son *simultaneamente diagonalizables*. Dar un ejemplo de transformaciones S, T, cada una diagonalizable pero no simultaneamente diagonalizables.

    Las tres preguntas siguientes tratan del espacio cociente. Esta es una construcción muy común en matemática (ya se ha visto la construcción de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ como cociente de $\mathbf{Z}$) y el tratamiento aqui, ligeramente diferente al del texto, pretende dar un patrón "universal", que se puede seguir en otros casos.

15. Sea $W \subseteq V$ un subespacio. Se define una relación $\equiv_W$ en V (llamada *congruencia mod* W)por: $\vec{v} \equiv_W \vec{v'}$ si $\vec{v} - \vec{v'} \in W$. Probar que esta es una relación de equivalencia. Si $V = \mathbf{R}^2$ y W es un subespacio de dim. 1, o sea, una recta por el origen, mostrar que las clases de equivalencia son las rectas paralelas a W, y W mismo. Buscar ejemplos semejantes en $\mathbf{R}^3$. Regresando al caso general, probar que W es una clase de equivalencia y que es la única clase que es subespacio de V.

16. Se denota el conjunto de clases de equivalencia por V/W. La clase de $\vec{v} \in V$ se denota $[\vec{v}]$. Probar que $[\vec{v}] = \{\vec{v} + \vec{w} | \vec{w} \in W\}$, que se escribe a menudo $[\vec{v}] = \vec{v} + W$. Probar que V/W es un espacio vectorial con las definiciones: $[\vec{v}] + [\vec{v}'] = [\vec{v} + \vec{v}']$, $\lambda[\vec{v}] = [\lambda\vec{v}]$. Ojo, aqui hay algo que probar! Probar que la función $\pi : V \to V/W$ definida por $\pi(\vec{v}) = [\vec{v}]$ (y llamada "la proyección canónica) es una transformación lineal de núcleo W. Probar que π da una biyección entre subespacios de V/W y subespacios de V que contienen W. Sea W' un complemento directo de W en V, es decir, un subespacio tal que $V = W \oplus W'$. Probar que $\pi | W'$ es un isomorfismo entre W' y V/W. Concluir que si $\dim W = s$ entonces $\dim V/W = n - s$. Ilustrar con $\mathbf{R}^2$ como en la pregunta anterior.

17. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $W \subseteq V$ un subespacio estable bajo T. Probar que T induce una transformación lineal $\bar{T} : V/W \to V/W$, definida por $\bar{T}[\vec{v}] = [T(\vec{v})]$. Probar que T diagonalizable implica $\bar{T}$ diagonalizable. Dar un contra-ejemplo para la recíproca.